



## Sur le centralisateur d'une involution de $2E_6(2)$

Marguerite Virotte-Ducharme

### ► To cite this version:

| Marguerite Virotte-Ducharme. Sur le centralisateur d'une involution de  $2E_6(2)$ . 2007. hal-00195855

**HAL Id: hal-00195855**

**<https://hal.science/hal-00195855>**

Submitted on 11 Dec 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Sur le centralisateur d'une involution de ${}^2E_6(2)$ .

Marguerite-Marie Virotte-Ducharme

Équipe des groupes finis, UMR 7586; Institut de Mathématiques  
175, rue du Chevaleret; 75013 Paris France.

11 décembre 2007

## Résumé

On établit que le groupe  $2^{20+1}.U_6(2)$ , centralisateur dans  ${}^2E_6(2)$  d'une involution de la classe  $2A$ , est un quotient du groupe de Coxeter défini via le diagramme  $Q_{222}$ . Cela répond à un problème laissé ouvert dans la détermination des  $Q$ -groupes.

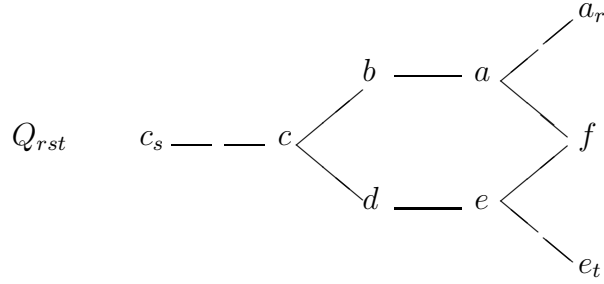
## Abstract

In this paper we prove that  $2^{20+1}.U_6(2)$ , known as the centralizer of an involution in the group  ${}^2E_6(2)$  is a quotient of a Coxeter group. We obtain a presentation of  $2^{20+1}.U_6(2)$  as a  $Q_{222}$ -group, which now resolve a long pending question.

## 1 Introduction

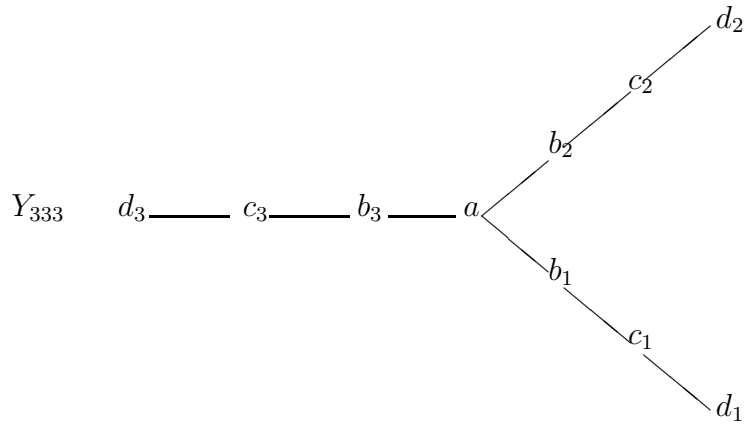
### 1.1 Motivation et résultats

Rappelons qu'un groupe de Coxeter est engendré par un ensemble d'involutions correspondant aux sommets d'un graphe  $X$  (graphe de Coxeter) tel que si  $x$  et  $y$  sont des éléments distincts dans  $X$  leur produit est d'ordre 3 s'ils sont joints par une arête et d'ordre 2 dans le cas contraire. On appelle  $Q$ -groupe un quotient du groupe de Coxeter défini par un graphe de Coxeter  $Q_{rst}$  ( $1 \leq r, s, t \leq 4$ ) où  $Q_{111}$  est un hexagone muni de trois bras notés  $a = a_1, a' = a_2, \dots, a_r, c = c_1, c' = c_2, \dots, c_s, e = e_1, e' = e_2, \dots, e_t$  :



Les groupes  $3^5 \rtimes S_6$ ,  $2.O_6^-(3) : 2$  et  $U_6(2)$  sont des  $Q$ -groupes définis à partir de  $Q_{111}$ ,  $Q_{211}$  et  $Q_{221}$  ; on en rappelle des présentations en annexe (voir aussi l'ATLAS [2]).

Dans un article déjà ancien [11] L. H. Soicher établit que le groupe  $E = 2^{3,2}E_6(2)$  est le quotient par la relation  $S = 1$  du groupe de Coxeter défini par :

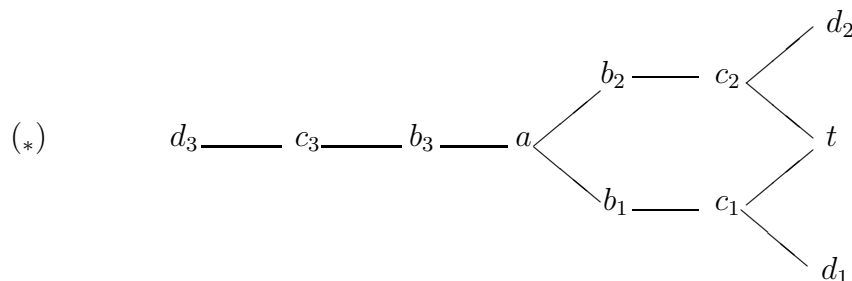


avec  $S = (ab_1c_1ab_2c_2ab_3c_3)^{10}$  ; le groupe  $E$  admet donc la présentation

$$E = (a, b_i, c_i, d_i (1 \leq i \leq 3) / Y_{333}, S = 1)$$

et son centre est  $\langle f_{12}, f_{23}, f_{31} \rangle$  où  $f_{ij} = (ab_i b_j b_k c_i c_j d_i)^9$ ,  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$  (notation de l'ATLAS [2]).

L. H. Soicher met en évidence un élément  $t$  de  $E$  satisfaisant à



et à la relation hexagonale :  $V = 1$  avec  $V = (atb_2c_1c_2b_1)^4$ .

Le centralisateur de  $d_3$  dans  $E$  contient donc des éléments satisfaisant aux relations de graphe  $Q_{222}$  obtenu à partir de (\*) en omettant  $d_3$  et  $c_3$ .

On connaît la structure du centralisateur d'une involution  $d$  de  $E$  provenant de la classe  $2A$  dans  $\bar{E} = E/Z(E)$  :  $C_E(d) \simeq 2^4.2^{20}.U_6(2)$  et  $C_{\bar{E}}(\bar{d}) \simeq 2^{20+1}.U_6(2)$ ,  $\bar{d}$  désignant l'image de  $d$  dans  $\bar{E}$  ([2], [6], [9], [12]).

Dans [11] L. H. Soicher ne donne pas de présentation de  $C_E(d)$ , mais conjecture, comme dans l'ATLAS ([2], [10]) que  $C_E(d)$  est un quotient du groupe défini par  $Q_{222}$  et  $V = 1$ .

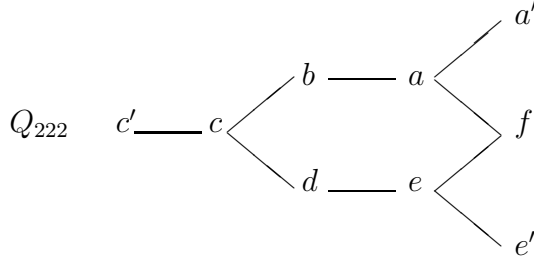
L'objet de ce travail est de décrire un jeu de relations noté  $rel(i)$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) (avec  $rel(1) \Rightarrow rel(2) \Rightarrow rel(3)$ ) suffisant pour définir les groupes  $2^{20+1}.U_6(2)$ ,  $2^4.2^{20}.U_6(2)$  et un troisième groupe  $2^2.2^4.2^{20}.U_6(2)$ .

On se propose d'établir le résultat suivant :

**Théorème.** *Soit  $G$  un groupe avec la présentation :*

$$G = (a, b, \dots, f, a', c', e' / Q_{222}, V = 1, rel(i)) (1 \leq i \leq 3)$$

où



$$V = (adbecf)^4 \quad (\text{relation hexagonale})$$

$$rel(i) \quad (\text{voir ci-après}),$$

et soit  $H$  le sous-groupe de  $G$  engendré par  $a, b, \dots, f, a', c'$ .

Pour  $i = 1$ , le groupe  $G$  est isomorphe au centralisateur d'une involution de la classe  $2A$  de  ${}^2E_6(2)$  : on a  $G \simeq 2^{20+1}.U_6(2)$  et  $H$  est isomorphe à  $2.U_6(2)$ .

Pour  $i = 2$ , le groupe  $G$  est isomorphe à  $2^4.2^{20}.U_6(2)$  et  $H$  à  $2.2.U_6(2)$ .

Pour  $i = 3$ , le groupe  $G$  est isomorphe à  $2^2.2^4.2^{20}.U_6(2)$  et  $H$  à  $2^2.2.U_6(2)$ .

Notations :

- $rel(1) = \{r = 1, z_1 = z_2 = z_3 = 1, m_a = m_e = 1\}$ ,
- $rel(2) = \{r = 1, \mathcal{R} = 1, m_a = m_e = 1\}$ ,
- $rel(3) = \{r = 1, \mathcal{R} = 1\}$ ,
- $r = (\mathcal{C}^{ee'de}\mathcal{A})^4$  avec  $\mathcal{C} = c'^{dbc}$  et  $\mathcal{A} = a'^{bfa}$ ,
- $\mathcal{R} = (\mathcal{C}^{ee'de}.\mathcal{C}^{aa'ba})^2$ ,
- $z_1 = (cc'bdaee')^9$ ,
- $z_2 = (cc'bdeaa')^9$ ,
- $z_3 = (ee'dfcaa')^9$ ,
- $m_a = (aa'fbcd)^5$ ,
- $m_e = (ee'dfab)^5$ .

## 1.2 Méthodes et Plan

Notons  $E$  un groupe isomorphe à  $2^3.{}^2E_6(2)$  et  $G$  un groupe satisfaisant aux conditions du théorème dans le cas  $i = 3$ .

Le travail comporte quatre parties : des résultats préliminaires, la construction d'un certain sous-groupe  $N$ , la démonstration proprement dite du théorème enfin des tables et une annexe.

### 1.2.1 Les résultats préliminaires

D'abord on donne quelques compléments sur les éléments intervenant dans les relations  $rel(i)$  ( $1 \leq i \leq 3$ ). Puis on vérifie que les relations qui déterminent  $G$  sont satisfaites dans  $E$  de sorte que l'on a un morphisme  $\Phi$  de  $G$  dans  $E$ ;  $\Phi(G)$  est un sous-groupe de  $E$  centralisé par une involution du système générateur de  $E$ .

### 1.2.2 Le sous-groupe $N$

Sa construction est une partie essentielle de la démonstration. En remplaçant le générateur  $e'$  par un de ses conjugués  $a^o$  dans  $G$ , on obtient un nouveau système générateur de  $G$  et on montre, grâce à la relation  $R = 1$ , que  $a'a^o$  est d'ordre 2. La fermeture normale de  $a'a^o$  dans  $G$  est alors le sous-groupe  $N$  en question. Pour construire  $N$ , on détermine des conjugués de  $a'a^o$  de manière à obtenir un système générateur  $\Gamma$  de  $N$ . Les calculs sont longs et fastidieux, ils ne sont pas reproduits ici; certains sont rassemblés sous forme de tables : table des conjugués  $\gamma^y, \gamma \in \Gamma, y \in \{a, b, \dots, f, a', c'\}$ , table des commutateurs des éléments de  $\Gamma$ ... On détermine l'ordre de  $N$ , ses éléments centraux et son groupe des commutateurs.

### 1.2.3 La preuve du théorème

Dans chacune des situations  $i = 1, 2, 3$ , on détermine les éléments centraux de  $G$  et donc l'ordre de  $Z(G)$ . On établit les résultats concernant le sous-groupe  $H$  (du théorème) puis on vérifie que  $G/Z(G).N$  est isomorphe à  $U_6(2)$ ; enfin on conclut que l'image de  $G$  dans  $E$  est bien le centralisateur d'une certaine involution de  $E$ .

### 1.2.4 Tables. Annexe

Pour faciliter la lecture, nous avons choisi de ne pas donner les détails des démonstrations. Nous donnons sous forme de tables des résultats concernant le groupe  $N$  (1.2.2). En annexe nous avons rassemblé des compléments utiles à la clarté du texte. En général ces résultats sont connus ou se démontrent sans difficultés; ils concernent les groupes  $3^5 \rtimes S_6$ ,  $2.O_6^-(3)$ ,  $W(E_7)$  et  $U_6(2)$ , groupes qui admettent des présentations via les graphes de Coxeter  $Q_{111}$ ,  $Q_{211}$ ,  $Y_{321}$  et  $Q_{222}$ .

## 2 Préliminaires

Dans cette section  $E$  et  $G$  désignent respectivement des groupes donnés avec leur présentation :

$$E = (a, b_i, c_i, d_i (1 \leq i \leq 3) / Y_{333}, S = 1)$$

$$G = (a, b, \dots, f, a', c', e' / Q_{222}, V = 1, rel(3)).$$

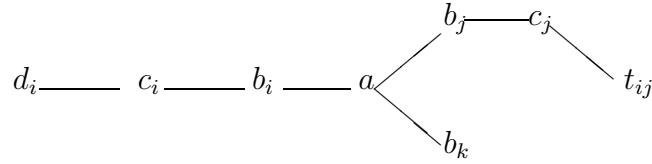
## 2.1 Résultats concernant le groupe $E$

### 2.1.1 Les éléments $f_{ij}$

Pour  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ , on note  $W_{ij}$  le sous-groupe de  $E$

$$W_{ij} = \langle a, b_i, c_i, d_i, b_j, c_j, b_k \rangle;$$

$W_{ij}$  est centralisé par  $d_k$  et admet un élément supplémentaire  $t_{ij}$  tel que :

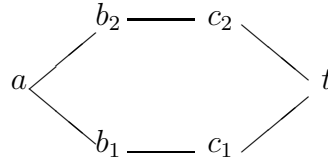


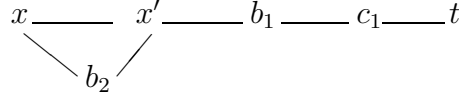
Rappelons que  $W_{ij}$  et  $W_{ik}$  engendrent un sous-groupe  $O_i$  de  $E$  isomorphe à  $O_7(3) \times 2$  dont l'involution centrale est  $f_{ij} = f_{ik}$  ( $f_{ij} = (ab_i b_j b_k c_i c_j d_i)^9$ ) (notations de l'ATLAS) et que la relation  $S = 1$  impose  $t_{ij} = t_{ik}$  ([2], [3], [11], [16]).

On désigne par  $t$  l'élément  $t_{31} = t_{32}$  et par  $f_i$  l'involution  $f_{ij} = f_{ik}$ ;  $f_i$  est centrale dans  $E$  et l'on a  $Z(E) = \langle f_{12}, f_{23}, f_{31} \rangle$  ([11]). En outre on a  $f_3 = d_3 m$  avec  $m = (ab_1 b_2 b_3 c_2 t)^5$  (voir Annexe 3).

### 2.1.2 La relation hexagonale

Soit  $H_0$  le sous-groupe de  $E$  engendré par  $a, b_1, c_1, t, b_2, c_2$ ; ces éléments satisfont aux relations ci-dessous :





où  $x = a^{b_1 c_1 t c_2}$  et  $x' = b_1^{c_1 t c_2}$ .

La relation  $S = 1$  impose que le sous-groupe  $H_0$  soit isomorphe à  $H_{3,6}$  ou à  $H_{3,6}/Z(H_{3,6})$  (voir l'Annexe 1). Or  $H_0$  est contenu dans  $O_i$  ( $O_i \simeq O_7(3) \times 2$ ) et son centre  $Z(H_0)$  (qui est un 3-groupe) est central dans  $O_i$ , il s'ensuit que  $Z(H_0) = 1$ ; on a alors  $(atb_1 c_2 c_1 b_2)^4 = 1$  (relation hexagonale) (Annexe 1, [8], [16], [18]).

## 2.2 Résultats concernant le groupe $G$

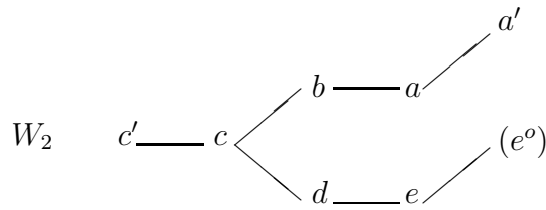
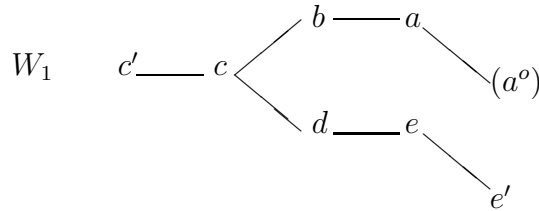
### 2.2.1 Notations

On pose  $\mathcal{A} = a^{a' b f a}$ ,  $\mathcal{C} = c^{c' d b c}$  et  $\mathcal{E} = e^{e' d f e}$ ; la relation  $V = 1$  impose que  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{E}$  commutent deux à deux et que l'on a :

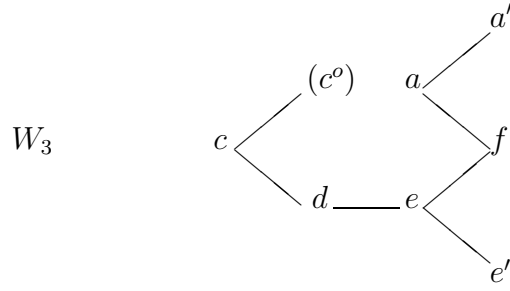
$$\mathcal{A}^{edfe} = \mathcal{A}^{cbdc}, \mathcal{C}^{abfa} = \mathcal{C}^{edfe}, \mathcal{E}^{cbdc} = \mathcal{E}^{abfa}.$$

### 2.2.2 Les éléments $z_i$ ( $1 \leq i \leq 3$ )

Ils désignent les involutions centrales des groupes  $W_i$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) isomorphes à  $W(E_7)$  définis respectivement à partir de :







On note  $a^o, e^o, c^o$  les involutions qui permettent d'obtenir les diagrammes complétés. On a  $a^o = \mathcal{C}^{abedcc'e'edcba}$  et  $e' = \mathcal{C}^{abedcc'a^oabcde}$ . Les éléments centraux  $z_i$  s'écrivent comme produit de sept involutions commutant deux à deux ; (avec les notations 2.2.1) on a :

- $z_1 = c'bd\mathcal{C}\mathcal{C}^{ee'de}a^oe' = (cc'bdaee')^9$
- $z_2 = c'bd\mathcal{C}\mathcal{C}^{aa'ba}e^oa' = (cc'bdeaa')^9$
- $z_3 = e'df\mathcal{E}\mathcal{E}^{aa'fa}c^oa' = (ee'dfcaa')^9$ .

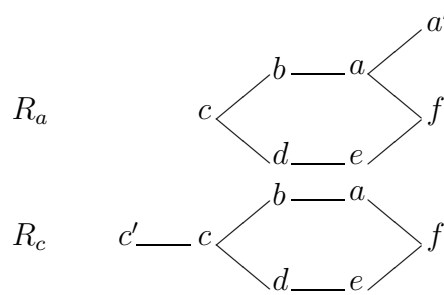
(voir aussi annexe 3).

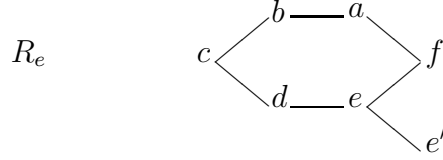
### 2.2.3 La relation $R = 1$

Les relations  $R = 1$  et  $(a'a^o)^2 = 1$  sont équivalentes. On a  $R = 1$  si et seulement si l'un des  $z_i$  est dans  $Z(G)$ . Sous l'hypothèse  $R = 1$ , les éléments  $z_1, z_2$  et  $z_3$  sont centraux dans  $G$ .

### 2.2.4 Les éléments $m_a$ et $m_e$

On désigne par  $R_a, R_c$  et  $R_e$  les sous-groupes de  $G$  respectivement définis à partir de :





Pour chacun d'entre eux la relation hexagonale est satisfaite.

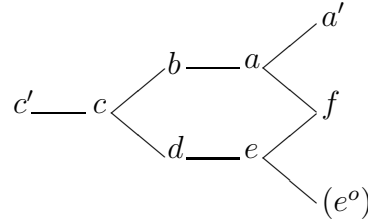
Ces groupes sont isomorphes à  $2.O_6^-(3) : 2$ , leur involution centrale est un produit de six involutions commutant deux à deux, on la note respectivement :

- $m_a = a'bfd\mathcal{A}\mathcal{A}^{cbdc} = (aa'fbcd)^5$
- $m_c = c'bdf\mathcal{C}\mathcal{C}^{edfe} = (cc'bdef)^5$
- $m_e = e'dfb\mathcal{E}\mathcal{E}^{abfa} = (ee'dfab)^5$

(voir Annexe 3).

### 2.2.5 Le sous-groupe $K_e$

Soit  $K_e$  le sous-groupe de  $G$  engendré par  $a, b, c, d, e, f, a', c'$  ;  $K_e$  est isomorphe à  $2^2.2.U_6(2)$  et l'on a  $Z(K_e) = \langle m_a, m_c \rangle \cdot \langle m_e z_2 \rangle$  (2.2.2, 2.2.3). Soit  $e^o$  l'unique élément de  $K_e$  tel que l'on ait :



On a alors  $m_a m_c = n_e$  où  $n_e$  est l'involution centrale du sous-groupe  $\langle b, c, d, e, f, e^o \rangle$  (voir Annexe 4). On a des résultats similaires pour les sous-groupes  $K_a = \langle a, b, c, d, e, f, c', e' \rangle$  et  $K_c = \langle a, b, c, d, e, f, a', e' \rangle$  (voir le tableau 2.2.6).

### 2.2.6 Un grand tableau

(Avec les notations ci-dessus). Pour chacun des groupes  $K$  ( $K = K_a, K_c, K_e$ ), le tableau ci-dessous indique un système générateur de  $K$  et de trois sous-groupes  $W$  isomorphes à  $W(E_7)$ ,  $W/Z(W)$  étant un représentant de chacune des trois classes de  $W^*(E_7)$  de  $K/Z(K)$  ([13], [14]). Pour chaque groupe, on précise les éléments centraux (tableau voir page suivante).

### 2.2.7 Les éléments $m_a$ , $m_c$ et $m_e$

Les éléments  $m_a$ ,  $m_c$  et  $m_e$  sont centraux dans  $G$ . En effet  $m_a$  et  $m_c$  (resp.  $m_c$  et  $m_e$ ) appartiennent à  $Z(K_e)$  (resp.  $Z(K_a)$ ) et ils centralisent  $e'$  (resp.  $a'$ ). (2.2.4, 2.2.5).

	$K_a$	$K_e$	$K_c$
Système générateur de $K$	$c' - c \begin{array}{c} \swarrow b - a \\ \searrow d - e \end{array} \begin{array}{c} \nearrow f \\ \searrow e' \end{array}$	$c' - c \begin{array}{c} \swarrow b - a \\ \searrow d - e \end{array} \begin{array}{c} \nearrow a' \\ \searrow f \end{array}$	$c \begin{array}{c} \swarrow b - a \\ \searrow d - e \end{array} \begin{array}{c} \nearrow a' \\ \searrow f \\ \searrow e' \end{array}$
Système générateur de $W$ , involution centrale	$c' - c \begin{array}{c} \swarrow b - a \\ \searrow d - e \end{array} \begin{array}{c} \nearrow (a^o) \\ \searrow e' \end{array} z_1$	$c' - c \begin{array}{c} \swarrow b - a \\ \searrow d - e \end{array} \begin{array}{c} \nearrow a' \\ \searrow (e_o) \end{array} z_2$	$c \begin{array}{c} \swarrow (c^o) a \\ \searrow d - e \end{array} \begin{array}{c} \nearrow a' \\ \searrow f \\ \searrow e' \end{array} z_3$
	$c' - c \begin{array}{c} \swarrow a \\ \searrow d - e \end{array} \begin{array}{c} \nearrow (a^o) \\ \searrow f \\ \searrow e' \end{array} z'_1$	$c' - c \begin{array}{c} \swarrow b - a \\ \searrow e \end{array} \begin{array}{c} \nearrow a' \\ \searrow f \\ \searrow (e_o) \end{array} z'_2$	$c \begin{array}{c} \swarrow (c^o) \\ \searrow b - a \end{array} \begin{array}{c} \nearrow a' \\ \searrow f \\ \searrow e \end{array} z'_3$
	$c' - c \begin{array}{c} \swarrow b - a \\ \searrow e \end{array} \begin{array}{c} \nearrow a^o \\ \searrow f \\ \searrow (e') \end{array} z''_1$	$(c') - c \begin{array}{c} \swarrow a \\ \searrow d - e \end{array} \begin{array}{c} \nearrow a' \\ \searrow f \\ \searrow e_o \end{array} z''_2$	$c \begin{array}{c} \swarrow c^o \\ \searrow b - a \end{array} \begin{array}{c} \nearrow (a') \\ \searrow f \\ \searrow d - e \end{array} z''_3$
	$z_1 = (cc'bdaee')^9$ $z'_1 = (ee'dfacc')^9$ $z''_1 = (aa^obfecc')^9$	$z_2 = (cc'bdeaa')^9$ $z'_2 = (aa'bfecc')^9$ $z''_2 = (ee^odfacc')^9$	$z_3 = (ee'dfcaa')^9$ $z'_3 = (aa'bfece')^9$ $z''_3 = (cc^obdaee')^9$
$Z(K)$	$\langle m_c, m_e \rangle . \langle m_c z_1 \rangle$	$\langle m_c, m_a \rangle . \langle m_c z_2 \rangle$	$\langle m_e, m_a \rangle . \langle m_e z_3 \rangle$
	$m_c m_e = n_a$	$m_c m_a = n_e$	$m_a m_e = n_c$
	$m_c z_1 = m_e z'_1 = n_a z''_1$	$m_c z_2 = m_a z'_2 = n_e z''_2$	$m_e z_3 = m_a z'_3 = n_c z''_3$

## 2.3 Lien entre $E$ et $G$

On note  $\Phi$  la correspondance entre les générateurs de  $G$  et des éléments de  $C_E(d_3)$  définie de la manière suivante :

$$G : \begin{array}{c} c' - c \begin{cases} b - a \begin{cases} a' \\ f \end{cases} \\ d - e \begin{cases} e' \end{cases} \end{cases} \end{array} \qquad E : d_3 - c_3 - b_3 - a \begin{cases} b_2 - c_2 \begin{cases} d_2 \\ t \end{cases} \\ b_1 - c_1 \begin{cases} d_1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} a \rightarrow c_2 & d \rightarrow b_1 & a' \rightarrow d_2 \\ b \rightarrow b_2 & e \rightarrow c_1 & c' \rightarrow b_3 \\ c \rightarrow a & f \rightarrow t & e' \rightarrow d_1 \end{array}$$

On note  $D$  le sous-groupe de  $E$  engendré par les éléments  $\Phi(a)$ ,  $\Phi(b)$ , ....

### 2.3.1 Hexagonale

La relation hexagonale est satisfaite par les images des générateurs de  $G$ . (2.1.2)

### 2.3.2 Éléments centraux de $E$

Les éléments  $\Phi(z_1)$  et  $\Phi(z_2)$  écrits comme produits des éléments  $\Phi(c) \dots$  sont les éléments centraux  $f_1$  et  $f_2$  de  $E$ . On vérifie que  $\Phi(z_3)$  est central dans  $E$ . Ainsi la relation  $\mathcal{R}$  est satisfaite dans  $E$ .

Les éléments  $\Phi(m_a)$  et  $\Phi(m_e)$  sont centraux dans  $E$ , ils n'appartiennent pas à l'ensemble  $Z(E) - \{1\}$  : on a donc  $\Phi(m_a) = \Phi(m_e) = 1$ .

Enfin on a  $\Phi(m_c) = m$  (notation 2.1) ; c'est un élément de  $Z(D)$  qui n'est pas dans  $Z(E)$ .

### 2.3.3 La relation $r = 1$

Les éléments  $\mathcal{C}^{ee'de}$  et  $\mathcal{A}$  correspondent par  $\Phi$  à  $x = a^{b_1 b_2 b_3 a.c_1 d_1 b_1 c_1}$  et  $y = c_2^{d_2 b_2 t c_2}$  ; la relation  $r = 1$ ,  $(\mathcal{C}^{ee'de} \mathcal{A})^4 = 1$ , s'écrit donc dans  $E$   $(xy)^4 = 1$ . Rappelons que  $E$  est un groupe de  $\{3, 4\}$ -transpositions ([2], [6]), l'ordre du produit de deux transpositions distinctes est donc 2, 3, 4. Or on sait que  $C_E(d_3)/O_2(C_E(d_3))$  est isomorphe à  $U_6(2)$ , groupe dans lequel l'image de  $xy$  n'est pas d'ordre 3 ; on a  $(xy)^4 = 1$ , la relation  $r = 1$  est satisfaite dans  $E$ .

### 2.3.4 En conclusion

De ce qui précède, il résulte que  $\Phi$  induit un morphisme de  $G$  dans  $E$  dont l'image  $D$  est un sous-groupe du centralisateur de  $d_3$  dans  $E$ .

## 3 Le sous-groupe $N$

Dans cette section  $G$  désigne un groupe satisfaisant aux hypothèses du théorème avec les relations  $rel(3)$ . Les notations sont celles introduites en 2.2.1.

L'objet de cette section est l'étude de la fermeture normale  $N$  dans  $G$  de  $\alpha_{a'} = a'a^o$ ,  $\alpha_{a'}$  est un élément d'ordre 2 (voir 2.2.2). On détermine un système générateur de  $N$  de cardinal 22, on établit que le groupe des commutateurs de  $N$  est d'ordre 2 et que le centre de  $N$  est abélien élémentaire d'ordre 8 et que l'on a  $\mathcal{D}(N) \subset Z(N) \subset Z(G)$ . Enfin, on vérifie que  $N$  est d'ordre  $2^{23}$ .

On pose  $Y = \{a, b, \dots, f, a', c'\}$ ;  $Y \cup \{e'\}$  et  $Y \cup \{a^o\}$  sont des systèmes générateurs de  $G$ .

### 3.1 Les éléments $\alpha_y$ et $\beta_y$ , $y \in Y$

#### 3.1.1

L'élément  $\alpha_{a'}$  et certains de ses conjugués dans  $G$  appartiennent au sous-groupe  $W_{12} = \langle W_1, W_2 \rangle$  (notations 2.2.2); la fermeture normale de  $\alpha_{a'}$  dans  $W_{12}$  est un 2-groupe abélien élémentaire d'ordre  $2^7$  contenant  $z_1 z_2$  (voir l'Annexe 3) et est engendré par les éléments  $\alpha_{a'}$ ,  $\alpha_a = \alpha_{a'}^{aa'}$ ,  $\alpha_b = \alpha_a^{ba}$ ,  $\alpha_c = \alpha_b^{cb}$ ,  $\alpha_{c'} = \alpha_c^{c'c}$ ,  $\alpha_d = \alpha_c^{dc}$ ,  $\alpha_e = \alpha_d^{ed}$  et l'on a  $\alpha_{a'} \alpha_b \alpha_{c'} = z_1 z_2$  (voir aussi [18]).

On pose  $\alpha_f = \alpha_e^{fe}$  et  $y_1 = y \alpha_y$  pour  $y$  dans  $Y$ ; on vérifie que les produits  $yy'$  et  $y_1 y'_1$  ont le même ordre pour  $y$  et  $y'$  dans  $Y - \{f\}$ . On calcule les ordres de  $y f_1$  et  $f y_1$  ( $y$  dans  $Y$ ), voir la table T.1.

#### 3.1.2

On observe que  $f_1^{af} = a_1^{bcv^2cb}$  avec  $v = adbecf$ ; puisque  $v^4 = V = 1$ , on a  $a_1 = a_1^{bcv^2cb.bcv^2cb} = f_1^{afbacbdcedf_1 eaf}$ . On pose  $\beta_a = \alpha_f^{af}$ , on définit successivement  $\beta_{a'} = \beta_a^{a'a}$ ,  $\beta_b = \beta_a^{ba}$ ,  $\beta_c = \beta_b^{cb}$ ,  $\beta_{c'} = \beta_c^{c'c}$ ,  $\beta_d = \beta_c^{dc}$ ,  $\beta_e = \beta_d^{ed}$ ,  $\beta_f = \beta_e^{fe}$ . On a alors  $\beta_f^{af} = \alpha_a$  d'où  $\beta_f^a = \beta_f \alpha_a = \alpha_a \beta_f = \alpha_a^f$  et  $\alpha_f^a = \alpha_f \beta_a = \beta_a \alpha_f = \beta_a^f$ . Pour  $y$  dans  $Y$ , on pose  $y_2 = y \beta_y$ .

#### 3.1.3

On a ainsi déterminé 16 éléments de  $N$ ; la table T.1 donne l'ordre des produits suivants :  $yy'_1$ ,  $yy'_2$ ,  $y_2 y'_1$ ,  $y_2 y'_2$  et  $y_1 y'_1$  pour  $y$  et  $y'$  dans  $Y$  (où  $yy_1$  et  $yy_2$  désignent

les involutions  $\alpha_y$  et  $\beta_y$ ).

## 3.2 Les éléments $x_a, x_{a'}, x_b, x_f$

### 3.2.1

Soit  $B$  le sous-groupe de  $G$  engendré par  $a, a', b, f$  et  $a^o$ . Posons  $L_a = a^{a'bfa^o}a$ ,  $L_{a'} = L_a^{a'a}$ ,  $L_b = L_a^{ba}$ ,  $L_f = L_a^{fa}$  et  $L_{a^o} = L_a^{a^oa}$ . Ces éléments sont d'ordre 4 (relation  $r = 1$ ) ; on désigne par  $x_a, x_{a'}, x_b, x_f$  et  $x_{a^o}$  leur carré respectif. Il est facile de voir que ces éléments commutent entre eux et que l'on a  $x_ax_{a'}x_bx_fx_{a^o} = 1$  ([8], [18], [19]).

On observe que  $x_f = (b_1f)^2 = \alpha_b^f\alpha_b = \alpha_b\alpha_b^f$  et  $x_b = (f_2b)^2 = \beta_f^b\beta_f = \beta_f\beta_f^b$  ; ainsi les éléments  $x_a, x_{a'}, x_b, x_f$  sont dans  $N$  et l'on a  $\alpha_b^f = \alpha_bx_f$  et  $\beta_f^b = \beta_fx_b$ .

### 3.2.2

Des égalités  $\alpha_a = \alpha_b^{ab} = \beta_f^{af}$ ,  $\beta_c = \beta_b^{cb} = \beta_d^{cd}$  et  $\alpha_e = \alpha_d^{ed} = \alpha_f^{ef}$  il vient :  $\beta_f^b = \alpha_b\beta_f\alpha_b^f$ ,  $\beta_d^b = \beta_b\beta_d\beta_b^d$ ,  $\alpha_f^d = \alpha_d\alpha_f\alpha_d^f$  ; de la première égalité on tire :  $\beta_f\beta_f^b = \beta_f(\alpha_b\beta_f)\alpha_b\alpha_b^f$  d'où  $x_b = [\beta_f, \alpha_b]x_f$ . Ainsi  $x_fx_b$  est un élément de  $\mathcal{D}(N)$ .

### 3.2.3

De l'égalité  $\alpha_{a'}\alpha_b\alpha_{c'} = z_1z_2$  (3.1.1) il résulte que  $\alpha_{a'}\alpha_b\alpha_{c'}$  commute à  $f$ , on a donc  $\alpha_{c'}^f = \alpha_{c'}x_f$  (car  $x_f$  commute avec  $\alpha_{a'}$  et  $\alpha_b$ ). On en déduit en outre que  $\beta_f$  commute à  $\alpha_b$  et que  $[\alpha_a, \beta_b]$  est un élément de  $Z(G)$ . On a donc  $x_b = x_f$ . Désormais on pose  $k := [\alpha_a, \beta_b]$ ,  $k$  est un élément de  $Z(G)$ .

### 3.2.4

Les éléments  $m_a$  et  $m_c$  sont dans le centre de  $G$  (2.2.7), ils commutent avec  $\alpha_b$ . On en tire les égalités suivantes :  $\alpha_d^f = \alpha_dx_f$ ,  $\beta_{a'}^d = \beta_{a'}x_{a'}$ ,  $\beta_a^d = \beta_ax_a$ ,  $\beta_b^d = \beta_bx_b$  ainsi que l'égalité  $x_{a'} = x_f$ .

## 3.3 Quelques éléments de $\mathcal{D}(N)$ ; les conjugués de $x_a, x_f, \alpha_y, \beta_y$ ( $y \in Y$ ) par les éléments de $Y$

### 3.3.1 Les commutateurs de $\alpha_y$ et $\beta_y$ avec $x_a, x_f, \alpha_{y'}, \beta_{y'}$ ( $y, y' \in Y$ )

On établit d'abord que  $x_a$  et  $x_f$  commutent avec  $\alpha_y$  et  $\beta_y$  ( $y \in Y$ ), puis que pour  $\{y, y'\} \neq \{a, f\}$  et  $y, y' \in Y$  on a  $[\alpha_y, \alpha_{y'}] = [\beta_y, \beta_{y'}] = 1$  et que  $[\alpha_a, \alpha_f] = [\beta_a, \beta_f] = k$  ( $k$  introduit en 3.2.3). Enfin, pour  $y, y'$  dans  $Y$ , on a  $[\alpha_y, \beta_{y'}] = k$  si  $yy'$  est d'ordre 3 et  $[\alpha_y, \beta_{y'}] = 1$  si  $yy'$  est d'ordre 2.

Ces résultats s'obtiennent grâce aux relations  $Q_{222}$  et à la table des produits T.1 (3.1.3).

### 3.3.2

La table T.2 donne les expressions des conjugués de  $\alpha_y, \beta_y, x_a, x_f$  ( $y \in Y$ ) par les éléments de  $Y$ , expressions écrites comme produit de ces mêmes éléments  $\alpha_y, \beta_y, x_a, x_f$ . Presque tous ces conjugués peuvent être écrits de cette manière. Il reste  $\alpha_c^f, \beta_e^b$  et des éléments notés  $t_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ).

Comme  $\alpha_b^f = x_f \alpha_b$  (3.2.1), en conjuguant par  $c$  puis par  $e$  on obtient d'abord  $\alpha_b^f \alpha_c^f = x_f^c \alpha_b \alpha_c$ , d'où  $x_f^c = \alpha_c^f x_f x_c$  ce qui donne  $t_1$ , puis  $(\alpha_b^f)^e = x_f^e \alpha_b$ ; or  $\beta_f^b = \beta_f x_f = \beta_f \alpha_b \alpha_b^f$  (3.2.1, 3.3.1), il vient  $\beta_f^{be} = \beta_f^b \cdot \beta_e^b = \beta_f \beta_e \alpha_b \alpha_b^f$  d'où  $x_f^e = \beta_e^b x_f \beta_e$  ce qui donne  $t_2$ .

Des égalités  $x_a^e = x_b^{ab.e} = x_f^{e.ab}$  et  $x_a^c = x_f^{a.f.c} = x_f^{c.af}$  on déduit, en utilisant  $t_2$  et  $t_1$  les expressions de  $t_4 = x_a^e = \beta_e^b \beta_e^{ba} x_a$  et  $t_3 = x_a^c = \alpha_c^f \alpha_c^{fa} x_f$ .

### 3.4 L'ensemble $\Gamma = \{\alpha_y, \beta_y, x_a, x_f, \alpha_c^f, \alpha_c^{fa}, \alpha_c^{fe}, \alpha_c^{fae}, \beta_e^b, \beta_e^{ba} \mid (y \in Y)\}$ engendre $N$ ; on a $\mathcal{D}(N) = \langle k \rangle$

On construit deux tables : celle, notée T.3, des conjugués  $\gamma^y$  ( $\gamma \in \Gamma, y \in Y$ ) écrits en fonction des éléments de  $\Gamma$ , et celle, notée T.4, des commutateurs des éléments de  $\Gamma$ . Les éléments non connus de la table T.3 sont notés  $t_5, t_6, \dots, t_{20}$ , leurs expressions sont données dans la liste T.5.

#### 3.4.1

La table T.4 s'obtient dans presque tous les cas par des arguments simples (relations  $Q_{2,2,2}$ , tables T.1 et T.2, résultats connus de la table T.3). dans les autres cas, on montre que chaque commutateur est central dans  $N$  et dans  $G$ , qu'il est de carré 1; puis on vérifie qu'il est égal soit à 1 soit à  $k$ . En particulier on a  $k^2 = 1$  et la relation  $r = 1, (\mathcal{C}^{ee'de} \mathcal{A})^4 = 1$ , impose  $k \neq 1$ .

#### 3.4.2

En conjuguant  $x_f^c$  par  $e$  et  $x_f^e$  par  $c$  on obtient  $x_f^{ce} = (\alpha_c^f x_f \alpha_c)^e = (\beta_e^b x_f \beta_e)^c$  (3.3.2) d'où l'on déduit les expressions de  $\beta_e^{bc}$  ( $t_{17}$ ) et  $\beta_e^{bca}$  ( $t_{20}$ ).

En outre, on a  $x_a^{ca'a} = x_f^c$  puisque  $x_{a'} = x_f$  (3.2.4); on en tire les valeurs de  $\alpha_c^{faa'}$  ( $t_5$ ) et de  $\alpha_c^{faa'e}$  ( $t_{12}$ ). En écrivant  $x_a^{ea'} = x_a^e x_f^e$ , il vient l'expression de  $\beta_e^{baa'}$  ( $t_{19}$ ).



### 3.4.3

En utilisant les valeurs connues de la table T.2 on obtient par conjugaison les expressions de  $\alpha_c^{fac'}(t_7)$ ,  $\alpha_c^{fad}(t_8)$ ,  $\alpha_c^{feb}(t_9)$ ,  $\alpha_c^{fec'}(t_{10})$ ,  $\alpha_c^{faec'}(t_{14})$ ,  $\beta_e^{bd}(t_{18})$ ,  $\beta_e^{bad}(t_{21})$ .

### 3.4.4

Les éléments  $m_c$  et  $m_a$  sont dans  $Z(G)$  (2.2.7). De  $[m_c, \alpha_e] = 1$  on déduit les écritures de  $\alpha_c^{fab}(t_6)$  puis de  $\alpha_c^{fabe}(t_{13})$  et de  $[m_c, \alpha_a] = 1$  on déduit celles de  $\alpha_c^{fed}(t_{11})$  et de  $\alpha_c^{faed}(t_{15})$ .

La connaissance de  $t_6$ ,  $t_{15}$  et  $t_{20}$  permet d'écrire le conjugué de  $\beta_e^{ba}$  par  $\mathcal{C} = c'^{bdc}$  :

$$\beta_e^{ba\mathcal{C}} = kx_ax_f\alpha_{c'}\beta_b\beta_f\beta_e^{ba}.$$

L'égalité  $[m_c, \beta_a] = 1$  conduit à une relation (S1) entre les éléments de  $\Gamma$  :

$$(S1) : \quad \alpha_b\alpha_d\alpha_f\beta_b\beta_d\beta_f = 1$$

Les expressions de  $t_6$ ,  $t_{12}$  et  $t_{13}$  conduisent à une expression du conjugué de  $\alpha_c^{fe}$  par  $\mathcal{A} = a'^{bfa}$  :

$$\alpha_c^{fe\mathcal{A}} = k\alpha_{a'}\alpha_d\beta_{a'}\beta_d\beta_f\beta_e^{ba}x_a\alpha_c^{fe}\beta_e^{baf}.$$

La relation (S1), les égalités  $[m_a, \beta_e] = [m_a, \alpha_c] = 1$  conduisent à l'expression de  $\beta_e^{baf}(t_{22})$ . Par conjugaison de  $t_{22}$  par  $c$  et de  $t_{20}$  par  $f$  on obtient  $\beta_e^{baf.c} = \beta_e^{bac.f}$  d'où :

$$(\beta_{c'}\beta_f\beta_e x_a x_f)^c \beta_e^{bac} \beta_e^{bc} = \alpha_c^{faef} \beta_e^{baf} \alpha_c^{faf}.$$

Grâce aux expressions  $t_{20}$ ,  $t_{17}$  et  $t_{22}$  on en déduit

$$\alpha_c^{faef} = k\beta_c\alpha_c\alpha_c^{fae}\alpha_c^{fe}\alpha_c^f\alpha_c^{fa} \quad (t_{16})$$

Enfin la relation (S1) et l'égalité  $[m_a, \alpha_e] = 1$  conduisent à une seconde relation entre les éléments de  $\Gamma$  :

$$(S2) : \quad \alpha_{a'}\beta_{c'}\beta_d\beta_f = 1.$$

Les tables T.3 et T.4 sont achevées.

### 3.4.5

Le sous-groupe  $N$  est engendré par  $\Gamma$  (tables T.2, T.3) et son groupe des commutateurs  $\mathcal{D}(N)$  est engendré par l'élément  $k$  d'ordre 2 (table T.4). Les relations (S1) et (S2) prouvent qu'il y a dans  $\Gamma$  deux générateurs superflus, par exemple  $\beta_b = \alpha_b\alpha_d\alpha_f\beta_d\beta_f$  (S1) et  $\beta_{c'} = \alpha_{a'}\beta_d\beta_f$  (S2). Ainsi  $N$  est engendré par 22 involutions, l'ordre de  $N/\mathcal{D}(N)$  divise  $2^{22}$  et celui de  $N$  divise  $2^{23}$ .

### 3.4.6

On pose  $\Gamma_0 = \Gamma - \{\beta_b, \beta_{c'}\}$ . Toute relation entre les éléments de  $\Gamma_0$  s'écrit  $1 = k^{p_0} \prod_{\gamma \in \Gamma_0} \gamma^{p_\gamma}$  où  $p_0$  et  $p_\gamma$  sont dans  $\{0, 1\}$ , chaque élément de  $\Gamma_0$  intervenant au plus une fois. On obtient alors :  $(\alpha_{a'}\alpha_b\alpha_{c'})^p = 1$  et  $(\alpha_{c'}\alpha_d\alpha_f\beta_{a'})^q = 1$  avec  $p$  et  $q$  dans  $\{0, 1\}$ .

### 3.4.7

Les éléments  $m_c z_1 = m_e z'_1$ ,  $m_c z_2 = m_a z'_2$  et  $m_e z_3 = m_a z'_3$  sont respectivement des éléments centraux des sous-groupes  $K_a$ ,  $K_e$  et  $K_c$  (voir 2.2.6). Des calculs conduisent aux égalités :

$$z_1 z_2 = \alpha_{a'}\alpha_b\alpha_{c'}, \quad z'_1 z_3 = \alpha_{c'}\alpha_d\alpha_f\beta_{a'}, \quad z'_2 z'_3 = \alpha_{a'}\alpha_b\alpha_d\alpha_f\beta_{a'}.$$

On observe que les éléments  $z_1 z_2$  et  $z'_1 z_3 = m_e m_c z_1 z_3$  sont dans  $N \cap Z(G)$ ; on pose  $z_1 z_2 = z$  et  $z'_1 z_3 = \hat{z}$ , on a  $z'_2 z'_3 = z\hat{z}$ .

## 3.5 Le centre de $N$ , l'ordre de $N$

### 3.5.1

Les éléments  $m_a$ ,  $m_c$  et  $m_e$  sont centraux dans  $G$  et l'on a  $m_a m_c = n_e$ ,  $m_c m_e = n_a$ ,  $m_e m_a = n_c$  (2.2.6). Rappelons que  $m_a = a'bfd\mathcal{A}\mathcal{A}^{cbdc}$  et  $n_a = a'bfd\mathcal{A}_0\mathcal{A}_0^{cbdc}$  où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}_0$  désignent respectivement  $a'^{bfa}$  et  $a'^{abfa}$  (voir 2.2.5 et 2.2.6). On établit alors l'égalité  $m_a n_a = k$  et par suite  $m_c n_c = k = m_e n_e$ .

### 3.5.2

Il résulte de 3.4.6 et 3.4.7 que les éléments  $k$ ,  $z$  et  $\hat{z}$  engendrent le centre de  $N$  et que  $Z(N)$  est contenu dans  $Z(G)$ . Ainsi on a  $|Z(N)| = 2^3$  et  $|N| = 2^{23}$ .

## 4 La preuve du théorème

Pour  $1 \leq i \leq 3$ , on considère un groupe  $G_i$  avec la présentation

$$(a, b, \dots, f, a', c', e' / Q_{222}, V = 1, rel(i))$$

(notations 1.1); on note  $N_i$  la fermeture normale de  $a'a^o$  dans  $G_i$  (pour  $a^o$  voir 2.2.2) et  $H_i$  le sous-groupe de  $G_i$  engendré par  $a, b, \dots, f, a', c'$ . Pour chaque jeu de relations  $rel(i)$ , on précise la structure de  $N_i$  (4.1), celle de  $H_i$  (4.2) puis on établit que  $G_i/Z(G_i)N_i$  est isomorphe à  $U_6(2)$  (4.3). Enfin on fait le lien avec le centralisateur d'une involution de la classe  $2A$  de  ${}^2E_6(2)$ .

## 4.1 Le sous-groupe $N_i$ de $G_i$

On a établi que  $k$  (3.2.3) est une involution centrale de  $G_i$  qui engendre  $\mathcal{D}(N_i)$  et appartient à  $Z(N_i)$  (3.2.3, 3.4.1). D'après 3.4.7 et 3.5, le centre de  $N_i$  est engendré par  $k$ ,  $z = z_1 z_2$  et  $\hat{z} = z'_1 z_3$  (avec  $z'_1 = m_e m_c z_1$ ).

Sous  $rel(1)$ , on a  $z_1 = z_2 = z_3 = 1$  et  $m_a = m_e = 1$ ; comme  $m_a m_e = n_c = k m_c$  (3.5.1), il vient  $k = m_c = \hat{z}$  et  $z = 1$ . Ainsi on a  $\mathcal{D}(N_1) = Z(N_1) = \langle k \rangle$ ,  $N_1$  est un 2-groupe extraspecial. De plus l'ensemble générateur  $\Gamma_0$  (3.4.6) comporte deux éléments superflus :  $\alpha_{a'} = \alpha_b \alpha_{c'}$  ( $z = 1$ ) et  $\beta_{a'} = \alpha_{c'} \alpha_d \alpha_f k$  ( $\hat{z} k = 1$ ). Le sous-groupe  $N_1$  est engendré par 20 éléments,  $N_1$  est d'ordre  $2^{20+1}$ , c'est le produit de 10 groupes diedraux d'ordre 8 de même centre  $\langle k \rangle$  :

$$\begin{aligned} & \langle \alpha_a, \alpha_f \rangle . \langle \alpha_b, \beta_a \rangle . \langle \alpha_{c'}, \beta_c \rangle . \langle \alpha_c, \beta_d \rangle . \langle \alpha_d, \beta_e \rangle . \langle \alpha_e, \beta_f \rangle . \\ & \langle \alpha_c^{fa}, \beta_e^d \rangle . \langle \alpha_c^f, \beta_e^{ba} \rangle . \langle x_f, \alpha_c^{fae} \alpha_c^f \rangle . \langle x_a, \alpha_c^{fe} \alpha_c^f \rangle . \end{aligned}$$

Sous  $rel(2)$  et  $rel(3)$ ,  $N_i$  d'ordre  $2^{23}$  (3.5.2).

## 4.2 Le sous-groupe $H_i$ de $G_i$

C'est un sous-groupe isomorphe à un quotient de  $2^2.2.U_6(2)$  (voir Annexe 4) dont le centre est  $\langle m_a, m_c \rangle . \langle m_c z_2 \rangle$  (Annexe 4 et 2.2.5); de plus  $m_a m_c = k m_e$  (2.2.6 et 3.5.1).

Sous  $rel(1)$ , on a  $z_2 = m_a = m_e = 1$  en conséquence  $m_c = k$  est l'unique involution centrale de  $H_1$  :  $H_1$  est isomorphe à  $2.U_6(2)$ .

Sous  $rel(2)$ ,  $m_c = k$  et  $z_2$  sont des involutions centrales de  $H_2$ ;  $Z(H_2)$  est d'ordre 4 et  $H_2$  est isomorphe à  $2^2.2.U_6(2)$ .

Sous  $rel(3)$ ,  $H_3$  est isomorphe à  $2^2.2.U_6(2)$ .

## 4.3 Le groupe $G_i$

Soit  $T_i$  le sous-groupe de  $Z(G_i)$  engendré par  $z_1, z_2, z_3, m_a, m_c, m_e$ , et soit  $\pi_i$  l'application canonique  $G_i \rightarrow G_i/T_i N_i$ . Remarquons que  $m_a m_e = k m_c$ ,  $z = z_1 z_2$  et  $\hat{z} = z'_1 z_3 = m_e m_c z_1 z_3$  sont dans  $T_i$ , donc  $Z(N_i)$  est un sous-groupe de  $T_i$  dont l'indice est 1, 2 ou  $2^3$  suivant que  $i = 1$ ,  $i = 2$  ou  $i = 3$ .

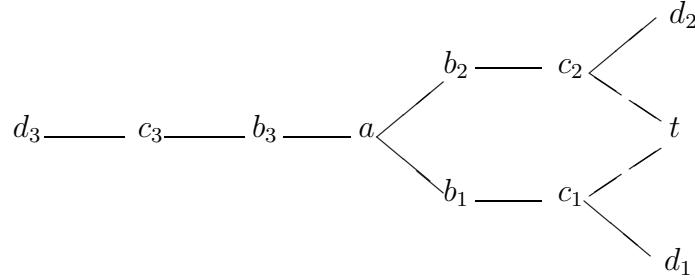
L'image de  $H_i$  par  $\pi_i$  est un sous-groupe  $U_i$  isomorphe à  $U_6(2)$  ( $Z(H_i) \subset T_i$ ) et l'image du système générateur de  $G_i$  coïncide avec celle de  $H_i$  (on a  $\pi_i(a') = \pi_i(a^o)$ ). Par conséquent  $\pi_i(G_i)$  est un quotient de  $2^2.2.U_6(2)$ . Mais comme  $\pi_i(G_i) = \pi_i(H_i) = U_i$ , dans toutes les situations  $i = 1, i = 2, i = 3$ ,  $\pi_i(G_i)$  est isomorphe à  $U_6(2)$  et l'on a  $Z(G_i) = T_i$ . On en déduit les isomorphismes suivants :

$$G_1 \simeq 2^{20+1}.U_6(2), \quad G_2 \simeq 2^{24}.U_6(2), \quad G_3 \simeq 2^2.2^{24}.U_6(2).$$

## 4.4 Fin de la preuve

Rappelons que le groupe  $E = 2^3 \cdot {}^2E_6(2)$  admet la présentation

$$(a, b_i, c_i, d_i \quad (1 \leq i \leq 3) / Q_{222}, V = 1) :$$



$$V = 1 \quad \text{avec } V = (atb_1c_2c_1b_2)^4.$$

Sous  $rel(2)$  (resp.  $rel(3)$ ) on a un morphisme  $\Phi_i$  de  $G_i$  dans le centralisateur de  $d_3$  dans  $E$  qui envoie  $z_1, z_2, z_3$  dans  $Z(E)$  (voir 2.3) ; l'image de  $G_2$  (resp.  $G_3$ ) est un sous-groupe du centralisateur de  $d_3$  dans  $E$  et l'on a  $|C_E(d_3)| = |G_2|$ . Ainsi

$$(a, b, \dots, f, a', c', e' / Q_{222}, V = 1, rel(i))$$

est une présentation de  $C_E(d_3)$  pour  $i = 2$  et d'une extension  $2^2 \cdot C_E(d_3)$  pour  $i = 3$ .

Sous  $rel(1)$ , on a un morphisme de  $G_1$  dans  $\bar{E} = E/Z(E)$  qui envoie  $G_1$  dans le centralisateur  $C$  de l'image de  $d_3$  dans  $\bar{E}$  ; comme  $G_1$  et  $\mathcal{C}$  ont le même ordre,

$$(a, b, \dots, f, a', c', e' / Q_{222}, V = 1, rel(1))$$

est une présentation du centralisateur d'une involution  $d$  dans  ${}^2E_6(2)$  ( $d$  provenant de la classe  $2A$ ).

## 5 Tables.

Table des ordres des produits  $yy'_i$ ,  $y_2y'_i$ ,  $y_iy'_i$  pour  $i = 1, 2$  et  $y, y' \in Y$ .

	$a'_1$	$a_1$	$b_1$	$c_1$	$c'_1$	$d_1$	$e_1$	$f_1$	$a'_2$	$a_2$	$b_2$	$c_2$	$c'_2$	$d_2$	$e_2$	$f_2$
$a'$	2	3	2	2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2
$a$	3	2	3	2	2	2	2	3	3	2	3	2	2	2	2	3
$b$	2	3	2	3	2	2	2	2	2	3	2	3	2	4	4	4
$c$	2	2	3	2	3	3	2	2	2	2	3	2	3	3	2	2
$c'$	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2
$d$	2	2	2	3	2	2	3	4	4	4	4	3	2	2	3	2
$e$	2	2	2	2	2	3	2	3	2	2	2	2	2	3	2	3
$f$	2	3	4	4	4	4	3	2	2	3	2	2	2	2	3	2
$a'_2$	2	3	2	2	2	4	2	2	2	3	2	2	2	4	2	2
$a_2$	3	2	3	2	2	4	2	3		2	3	2	2	4	2	3
$b_2$	2	3	2	3	2	4	2	2			2	3	2	2	4	4
$c_2$	2	2	3	2	3	3	2	2				2	3	3	2	2
$c'_2$	2	2	2	3	2	2	2	2					2	2	2	2
$d_2$	2	2	4	3	2	2	3	4						2	3	2
$e_2$	2	2	4	2	2	3	2	3							2	3
$f_2$	2	3	2	4	4	4	3	2								2
$a'_1$	2	3	2	2	2	2	2	2								
$a_1$		2	3	2	2	2	2	3								
$b_1$			2	3	2	2	2	4								
$c_1$				2	3	3	2	4								
$c'_1$					2	2	2	4								
$d_1$						2	3	2								
$e_1$							2	3								
$f_1$								2								

Table T.1

Tables des conjugués  $\gamma_y^{y'}$  pour  $\gamma_y \in \{\alpha_y, \beta_y\}$ ,  $y$  et  $y' \in Y$

Table T.2 (3.3.2)

	$a'$	$a$	$b$	$c$	$c'$	$d$	$e$	$f$
$\alpha_{a'}$	$\alpha_{a'}$	$\alpha_{a'}\alpha_a$	$\alpha_{a'}$	$\alpha_{a'}$	$\alpha_{a'}$	$\alpha_{a'}$	$\alpha_{a'}$	$\alpha_{a'}$
$\alpha_a$	$\alpha_a\alpha_{a'}$	$\alpha_a$	$\alpha_a\alpha_b$	$\alpha_a$	$\alpha_a$	$\alpha_a$	$\alpha_a$	$\alpha_a\beta_f$
$\alpha_b$	$\alpha_b$	$\alpha_b\alpha_a$	$\alpha_b$	$\alpha_b\alpha_c$	$\alpha_b$	$\alpha_b$	$\alpha_b$	$\alpha_b x_f$
$\alpha_c$	$\alpha_c$	$\alpha_c$	$\alpha_c\alpha_b$	$\alpha_c$	$\alpha_c\alpha_{c'}$	$\alpha_c\alpha_d$	$\alpha_c$	$\alpha_c^f$
$\alpha_{c'}$	$\alpha_{c'}$	$\alpha_{c'}$	$\alpha_{c'}$	$\alpha_{c'}\alpha_c$	$\alpha_{c'}$	$\alpha_{c'}$	$\alpha_{c'}$	$\alpha_{c'}x_f$
$\alpha_d$	$\alpha_d$	$\alpha_d$	$\alpha_d$	$\alpha_d\alpha_c$	$\alpha_d$	$\alpha_d$	$\alpha_d\alpha_e$	$\alpha_d x_f$
$\alpha_e$	$\alpha_e$	$\alpha_e$	$\alpha_e$	$\alpha_e$	$\alpha_e$	$\alpha_e\alpha_d$	$\alpha_e$	$\alpha_e\alpha_f$
$\alpha_f$	$\alpha_f$	$\alpha_f\beta_a$	$\alpha_f$	$\alpha_f$	$\alpha_f$	$\alpha_f x_f$	$\alpha_f\alpha_e$	$\alpha_f$
$\beta_{a'}$	$\beta_{a'}$	$\beta_{a'}\beta_a$	$\beta_{a'}$	$\beta_{a'}$	$\beta_{a'}$	$\beta_{a'}x_f$	$\beta_{a'}$	$\beta_{a'}$
$\beta_a$	$\beta_a\beta_{a'}$	$\beta_a$	$\beta_a\beta_b$	$\beta_a$	$\beta_a$	$\beta_a x_a$	$\beta_a$	$\beta_a\alpha_f$
$\beta_b$	$\beta_b$	$\beta_b\beta_a$	$\beta_b$	$\beta_b\beta_c$	$\beta_b$	$\beta_b x_f$	$\beta_b$	$\beta_b$
$\beta_c$	$\beta_c$	$\beta_c$	$\beta_c\beta_b$	$\beta_c$	$\beta_c\beta_{c'}$	$\beta_c\beta_d$	$\beta_c$	$\beta_c$
$\beta_{c'}$	$\beta_{c'}$	$\beta_{c'}$	$\beta_{c'}$	$\beta_{c'}\beta_c$	$\beta_{c'}$	$\beta_{c'}$	$\beta_{c'}$	$\beta_{c'}$
$\beta_d$	$\beta_d$	$\beta_d$	$\beta_d x_f$	$\beta_d\beta_c$	$\beta_d$	$\beta_d$	$\beta_d\beta_e$	$\beta_d$
$\beta_e$	$\beta_e$	$\beta_e$	$\beta_e^b$	$\beta_e$	$\beta_e$	$\beta_e\beta_d$	$\beta_e$	$\beta_e\beta_f$
$\beta_f$	$\beta_f$	$\beta_f\alpha_a$	$\beta_f x_f$	$\beta_f$	$\beta_f$	$\beta_f$	$\beta_f\beta_e$	$\beta_f$
$x_f$	$x_f$	$x_f x_a$	$x_f$	$t_1$	$x_f$	$x_f$	$t_2$	$x_f$
$x_a$	$x_a x_f$	$x_a$	$x_a x_f$	$t_3$	$x_a$	$x_a$	$t_4$	$x_a x_f$
$\alpha_c^f$	$\alpha_c^f$	$\alpha_c^{fa}$	$\alpha_c^f\alpha_b x_f$	$\alpha_c^f$	$\alpha_c^f\alpha_{c'}x_f$	$\alpha_c^f\alpha_d x_f$	$\alpha_c^{fe}$	$\alpha_c$
$\alpha_c^{fa}$	$t_5$	$\alpha_c^f$	$t_6$	$\alpha_c^{fa}$	$t_7$	$t_8$	$\alpha_c^{fae}$	$\alpha_c^{fa}$
$\alpha_c^{fe}$	$\alpha_c^{fe}$	$\alpha_c^{fae}$	$t_9$	$\alpha_c^{fe}$	$t_{10}$	$t_{11}$	$\alpha_c^f$	$\alpha_c^{fe}$
$\alpha_c^{fae}$	$t_{12}$	$\alpha_c^{fe}$	$t_{13}$	$\alpha_c^{fae}$	$t_{14}$	$t_{15}$	$\alpha_c^{fa}$	$t_{16}$
$\beta_e^b$	$\beta_e^b$	$\beta_e^{ba}$	$\beta_e$	$t_{17}$	$\beta_e^b$	$t_{18}$	$\beta_e^b$	$\beta_e^b\beta_f x_f$
$\beta_e^{ba}$	$t_{19}$	$\beta_e^b$	$\beta_e^{ba}$	$t_{20}$	$\beta_e^{ba}$	$t_{21}$	$\beta_e^{ba}$	$t_{22}$

Table T.3 (3.4)

Table des commutateurs des éléments de  $\Gamma$  (3.4)

Table T.4

	$\beta_{a'}$	$\beta_a$	$\beta_b$	$\beta_c$	$\beta_{c'}$	$\beta_d$	$\beta_e$	$\beta_f$	$\alpha_f$	$\alpha_c^f$	$\alpha_c^{fa}$	$\alpha_c^{fe}$	$\alpha_c^{fae}$	$\beta_e^b$	$\beta_e^{ba}$
$\alpha_{a'}$		$k$													
$\alpha_a$	$k$		$k$						$k$						
$\alpha_b$		$k$		$k$											
$\alpha_c$			$k$		$k$	$k$									
$\alpha_{c'}$				$k$											
$\alpha_d$				$k$			$k$							$k$	$k$
$\alpha_e$						$k$		$k$						$k$	$k$
$\alpha_f$							$k$								
$\beta_{a'}$															
$\beta_a$								$k$							
$\beta_b$										$k$	$k$	$k$	$k$		
$\beta_c$															
$\beta_{c'}$										$k$	$k$	$k$	$k$		
$\beta_d$										$k$	$k$	$k$	$k$		
$\beta_e$									$k$						
$\beta_f$		$k$													
$x_a$												$k$	$k$		
$x_f$													$k$		
$\alpha_c^f$			$k$		$k$	$k$								$k$	$k$
$\alpha_c^{fa}$			$k$		$k$	$k$								$k$	
$\alpha_c^{fe}$			$k$		$k$	$k$									$k$
$\alpha_c^{fae}$			$k$		$k$	$k$								$k$	
$\beta_e^b$											$k$		$k$		
$\beta_e^{ba}$										$k$		$k$			

Les valeurs non indiquées valent 1.

Valeurs des éléments  $t_i$  ( $1 \leq i \leq 22$ )

Table T.5

$t_1$	$x_f^c$	$\alpha_c \alpha_c^f x_f$	3.3.2
$t_2$	$x_f^e$	$\beta_e \beta_e^b x_f$	3.3.2
$t_3$	$x_a^c$	$\alpha_c^f \alpha_c^{fa} x_a$	3.3.2
$t_4$	$x_a^e$	$\beta_e^b \beta_e^{ba} x_a$	3.3.2
$t_5$	$\alpha_c^{faa'}$	$\alpha_c \alpha_c^f \alpha_c^{fa}$	3.4.2
$t_6$	$\alpha_c^{fab}$	$k \alpha_c \alpha_d \beta_{c'} \beta_d \beta_f \alpha_c^f \alpha_c^{fa} x_a x_f$	3.4.4
$t_7$	$\alpha_c^{fac'}$	$\alpha_{c'} \alpha_c^{fa} x_a x_f$	3.4.3
$t_8$	$\alpha_c^{fad}$	$\alpha_d \alpha_c^{fa} x_a x_f$	3.4.3
$t_9$	$\alpha_c^{feb}$	$\alpha_b \beta_e \alpha_c^{fe} \beta_e^b x_f$	3.4.3
$t_{10}$	$\alpha_c^{fec'}$	$\alpha_{c'} \beta_e \alpha_c^{fe} \beta_e^b x_f$	3.4.3
$t_{11}$	$\alpha_c^{fed}$	$\alpha_b \alpha_c \alpha_f \beta_b \beta_{c'} \beta_e \alpha_c^f \alpha_c^{fe} \beta_e^b x_f$	3.4.4
$t_{12}$	$\alpha_c^{faea'}$	$\alpha_c \alpha_c^{fe} \alpha_c^{fae}$	3.4.2
$t_{13}$	$\alpha_c^{faeb}$	$k \alpha_c \alpha_d \alpha_e \beta_{c'} \beta_d \beta_e \beta_f \alpha_c^{fe} \alpha_c^{fae} \beta_e^{ba} x_a x_f$	3.4.4
$t_{14}$	$\alpha_c^{faec'}$	$\alpha_{c'} \beta_e \alpha_c^{fae} \beta_e^{ba} x_a x_f$	3.4.3
$t_{15}$	$\alpha_c^{faed}$	$\alpha_a \alpha_b \alpha_c \alpha_f \beta_b \beta_{c'} \beta_e \alpha_c^{fa} \alpha_c^{fae} \beta_e^{ba} x_a x_f$	3.4.4
$t_{16}$	$\alpha_c^{faef}$	$k \alpha_c \beta_c \alpha_c^f \alpha_c^{fa} \alpha_c^{fe} \alpha_c^{fae}$	3.4.4
$t_{17}$	$\beta_e^{bc}$	$\alpha_c^f \alpha_c^{fe} \beta_e^b$	3.4.2
$t_{18}$	$\beta_e^{bd}$	$\beta_d \beta_e^b x_f$	3.4.3
$t_{19}$	$\beta_e^{baa'}$	$\beta_e \beta_e^b \beta_e^{ba}$	3.4.2
$t_{20}$	$\beta_e^{bac}$	$\alpha_c^{fa} \alpha_c^{fae} \beta_e^{ba}$	3.4.2
$t_{21}$	$\beta_e^{bad}$	$\beta_d \beta_e^{ba} x_a x_f$	3.4.3
$t_{22}$	$\beta_e^{baf}$	$\beta_{c'} \beta_e \beta_f \beta_e^b \beta_e^{ba} x_a x_f$	3.4.4

## 6 Annexe

Tous les graphes ci-dessous sont des graphes de Coxeter.

### 6.1 Le graphe $Q_{111}$

On désigne par  $G$  le groupe  $H_{3,6} \simeq 3^5 \rtimes S_6$ .



### 6.1.1

Le groupe  $G$  admet la présentation  $(x_i(0 \leq i \leq 5)/h)$  avec  $h$  :

$$\begin{array}{c}
 x_1 \text{---} x_2 \text{---} x_3 \text{---} x_4 \text{---} x_5 \\
 \quad \diagdown \quad \diagup \\
 \quad \quad x_0
 \end{array}$$

$$(x_1^{x_2} x_0)^3 = 1$$

L'élément  $z = (x_1 x_0)(x_1 x_0)^{x_2}(x_1 x_0)^{x_2 x_3}(x_1 x_0)^{x_2 x_3 x_4}(x_1 x_0)^{x_2 x_3 x_4 x_5}$  qui s'écrit aussi  $(x_2 x_1 x_3 x_4 x_5 x_0)^5$  est d'ordre 3 et engendre le centre de  $G$ .

### 6.1.2

Posons  $a = x_1^{x_2}$ ,  $b = x_3$ ,  $c = x_4$ ,  $d = x_5$ ,  $e = x_2^{x_3 x_4 x_5}$ ,  $f = x_0$ ; alors  $a, b, c, d, e, f$  engendrent  $G$  et satisfont à :

$$\begin{array}{c}
 \phantom{Q_{111}} \quad \quad \quad \begin{array}{ccccc}
 & b & \text{---} & a & \\
 & \diagdown & & \diagup & \\
 c & & & & f \\
 & \diagup & & \diagdown & \\
 & d & \text{---} & e &
 \end{array}
 \end{array}$$

$$(f.a^{bcde})^3 = 1$$

on a la relation  $(adbecf)^4 = z.(f^{ed}.a^{bc})^3$ .

### 6.1.3

Le groupe  $G/Z(G)$ , noté aussi  $H_{3,6}^*$  admet la présentation

$$(a, b, \dots, f/Q_{111}, V = 1)$$

où  $V = 1$  est la relation hexagonale avec  $V = (adbecf)^4$ .  
([8], [13], [15], [18]).

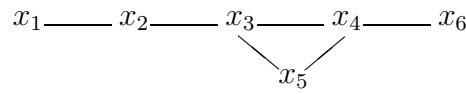
## 6.2 Le graphe $Q_{211}$

On désigne par  $G$  le groupe  $G^+(6, 3)$  (noté  $2.O_6^-(3) : 2$  dans l'ATLAS) et par  $\tilde{G}$  l'extension centrale non scindée

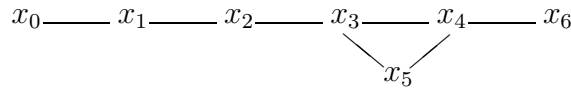
$$1 \longrightarrow 3 \longrightarrow \tilde{G} \longrightarrow G \rightarrow 1.$$

### 6.2.1

Le groupe  $\tilde{G}$  admet la présentation  $(x_i(1 \leq i \leq 6)/g_6, (x_3^{x_4}x_5)^3 = 1)$  avec  $g_6$  :



Il existe un unique élément  $x_0$  tel que :

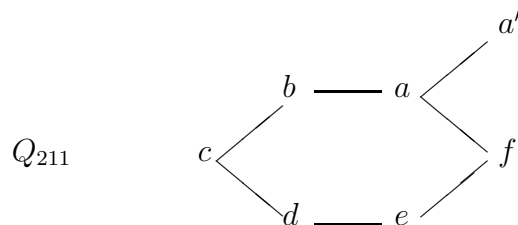


On a :  $x_0 = x_1^{xx'x_2x_1}$ ,  $x = x_3^{x_4x_2x_5x_6x_3x_4x_3}$ ,  $x' = x_3^{xx_2x_5x_3}$ . Le centre de  $\tilde{G}$  est d'ordre 6,  $Z(\tilde{G}) = \langle m, z \rangle$ . L'élément  $z$ , d'ordre 3, engendre le centre du sous-groupe  $\langle x_i(0 \leq i \leq 5) \rangle$  isomorphe à  $H_{3,6}$  (voir l'Annexe 1). L'élément  $m$  (produit de six involutions commutant deux à deux) est d'ordre 2 et engendre le centre du sous-groupe  $\langle x_3^{x_4}, x_i(0 \leq i \leq 6, i \neq 3, 4) \rangle$  isomorphe à  $W(D_6)$ . On a

$$m = x_2x_5x_6xx'x_0 = (x_3^{x_4}x_6x_5x_2x_1x_0)^5.$$

### 6.2.2

Posons  $a = x_3^{x_4}$ ,  $b = x_2$ ,  $c = x_1$ ,  $d = x_0$ ,  $e = x_3^{x_2x_1x_0}$ ,  $f = x_5$ ,  $a' = x_6$ . Alors les éléments  $a, b, \dots, f, a'$  engendrent  $\tilde{G}$  et satisfont à



### 6.2.3

Le groupe  $G$  ( $G \simeq G^+(6, 3)$ ) admet la présentation :

$$G = (a, b, \dots, f, a' / Q_{211}, V = 1)$$

où  $V = 1$  est la relation hexagonale ( $V = (adbecf)^4$ ) ; le centre de  $G$  est engendré par l'involution  $m$ ,  $m$  est l'involution centrale de tout sous-groupe isomorphe à  $W(D_6)$  engendré par des conjugués de  $a$  dans  $G$ . Posons  $\mathcal{A} = a^{a'bf a}$  ; on a les égalités suivantes :

$$m = a'bfd\mathcal{A}\mathcal{A}^{cbdc} = (aa'bfc d)^5 = a'bfd\mathcal{A}\mathcal{A}^{edfe} = (aa'b f e d)^5$$

([2], [8], [13], [15], [18]).

## 6.3 Le graphe $Y_{321}$

On désigne par  $G$  le groupe de Coxeter  $W(E_7)$  ( $\simeq 2 \times Sp_6(2) \simeq 2 \times O_7(2)$ )

### 6.3.1

Le groupe  $G$  admet la présentation  $(a, b, \dots, e, c', e' / Y_{321})$  avec :

$$Y_{321} \quad c' \text{ --- } c \begin{cases} \nearrow b \text{ --- } a \text{ --- } (a^o) \\ \searrow d \text{ --- } e \text{ --- } e' \end{cases} \quad ;$$

il existe dans  $G$  un unique élément  $a^o$  qui complète le diagramme ;  $a^o$  s'écrit :  
 $a^o = \mathcal{C}^{abedcc'e'edcba}$  avec  $\mathcal{C} = c'^{bdc}$ .

### 6.3.2

Le centre de  $G$  est engendré par une involution  $z_1$  (produit de sept éléments d'ordre 2 commutant deux à deux) ; on a :

$$z_1 = c'bd\mathcal{C}\mathcal{C}^{ee'de}e'a^o = c'bd\mathcal{C}\mathcal{C}^{aa^oba}e'a^o = (cc'bdeae')^9 = (cc'bdeaa^o)^9$$

### 6.3.3

(Avec les notations ci-dessus). Le groupe  $\tilde{G}$  avec la présentation

$$(a, b, \dots, e, a', c', e' / Y_{331}, [z_1, a'] = 1)$$

$$Y_{331} \quad c' \text{ --- } c \begin{cases} \nearrow b \text{ --- } a \text{ --- } a' \\ \searrow d \text{ --- } e \text{ --- } e' \end{cases}$$

est isomorphe à  $A \rtimes W(E_7)$ , où  $A$  est un 2-groupe abélien élémentaire d'ordre  $2^7$  engendré par les conjugués de  $a^oa'$  ; le centre de  $\tilde{G}$  est engendré par  $z_1$  et

$z_2$  ( $z_2$  désignant l'involution centrale du sous-groupe  $\langle a, b, \dots, e, a', c' \rangle$ ),  $z_2 = (cc'bdaea')^9$ . Le produit  $z_1 z_2$  est dans  $A$  et les relations  $[z_1, a'] = 1$  et  $(a^o a')^2 = 1$  sont équivalentes.

([1], [2], [3], [5], [7], [14], [16], [19])

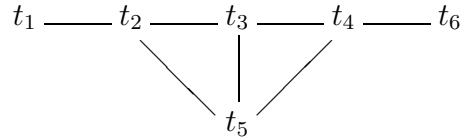
## 6.4 Le graphe $Q_{221}$

On désigne par  $U$  le groupe simple  $U_6(2)$  ( $\simeq {}^2A_5(2)$ ), son multiplicateur de Schur est  $2^2 \times 3$ . Les éléments  $t_i$  qui interviennent dans cette section sont des transvections unitaires et n'ont pas de lien avec les  $t_i$  introduits section 3.

### 6.4.1

Le groupe  $\hat{K}$  isomorphe à  $(2^2 \times 3).2 \times U$  admet la présentation

$$(t_i (1 \leq i \leq 6/\underline{u}, (t_{13} t_6)^2 = 1) \quad \text{avec} \quad \underline{u} :$$



$$(t_3^{t_2} t_5)^3 = (t_3^{t_4} t_5)^3 = (t_3^{t_2 t_4} t_5)^3 = 1,$$

où  $t_{13} = t_1^{t' t''} t_3 t_4$  ( $t' = t_4^{t_3 t_5 t_2 t_3 t_5}$ ,  $t'' = t_2^{t_3 t_5 t_4 t_3 t_5}$ ). Les éléments  $t_i$  correspondent aux transvections unitaires  $t_{v_i}$ , les  $v_i$  ( $1 \leq i \leq 6$ ) forment une base de l'espace vectoriel sur  $\mathbb{F}_4$  associé et satisfont à  $(v_i, v_j) = 0$  si  $(t_i t_j)^2 = 1$ ,  $(v_i, v_j) = 1$  si  $(t_i t_j)^3 = 1$ , sauf pour  $\{i, j\} = \{3, 5\}$ , où on a alors  $(v_5, v_3) = \omega$  avec  $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \omega, \omega^2\}$ . L'élément  $t_{13}$  correspond à la transvection  $t_{v_1+v_3}$  et satisfait aux relations :

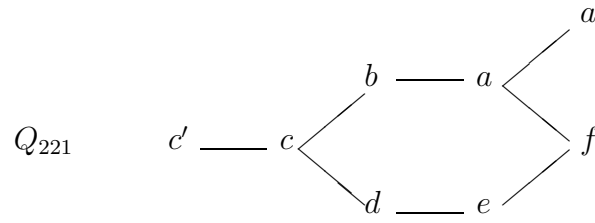
$$(t_0) \text{ --- } t_1 \text{ --- } t_2 \text{ --- } t_5 \text{ --- } t_4 \text{ --- } t_6$$

$$(t_5^{t_4} . t_{13})^3 = 1.$$

Le sous-groupe  $T = \langle t_{13}, t_i (1 \leq i \leq 6, i \neq 3) \rangle$  est isomorphe à un quotient du groupe  $\tilde{G}$  (voir Annexe 2), son centre contient un élément d'ordre 3, central dans  $\hat{K}$ .

### 6.4.2

Il existe des conjugués de  $t_1$  dans  $\hat{K} : a, b, \dots, f, a', c'$  tels que :



On a la correspondance :

$$\begin{aligned}
 a &\longrightarrow t_{v_4+v_5}, b \longrightarrow t_{v_2}, c \longrightarrow t_{v_1}, d \longrightarrow t_{v_2+\omega(v_1+v_3)+\omega v_6}, \\
 e &\longrightarrow t_{\omega^2 v_1+\omega(v_1+v_6)+v_5}, f \longrightarrow t_{v_1+v_3}, a' \longrightarrow t_{v_6}, c' \longrightarrow t_{v_2+v_6}.
 \end{aligned}$$

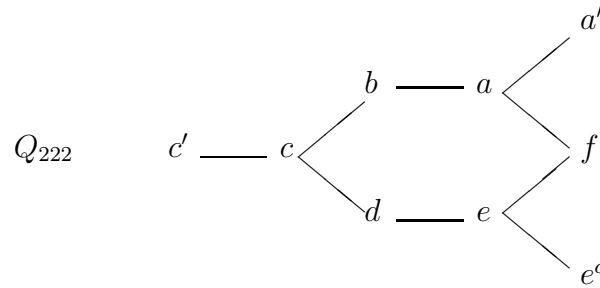
### 6.4.3

Le groupe  $K$  (isomorphe à  $2^2.2.U$ ) admet la présentation

$$(a, b, \dots, f, a', c' / Q_{221}, V = 1)$$

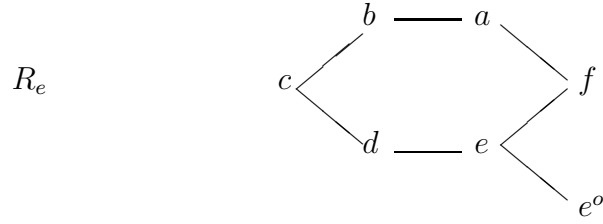
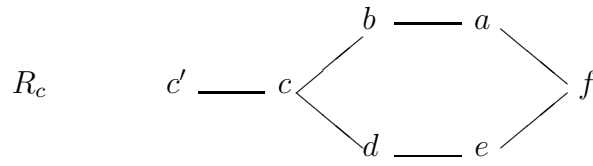
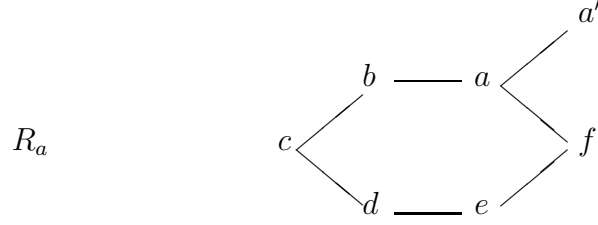
où  $V = 1$  désigne la relation hexagonale  $V = (adbecf)^4$ .

a) Il existe un unique élément  $e^o$  satisfaisant aux relations :



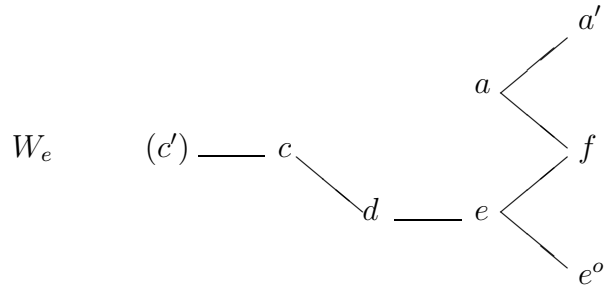
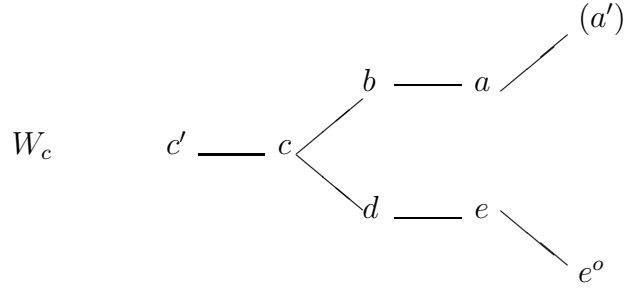
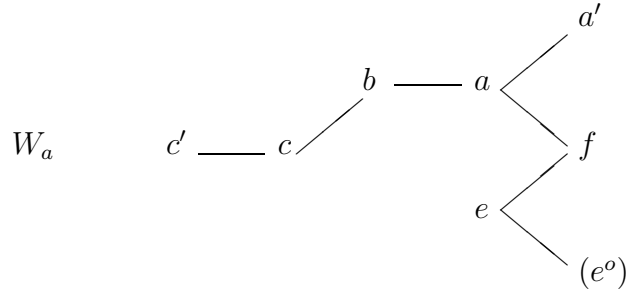
cet élément s'écrit  $e^o = \mathcal{C}^{abedcc'a'abcde} = \mathcal{A}^{cbadaa'c'cbafe}$  (avec  $\mathcal{A} = a^{a'bfa}$  et  $\mathcal{C} = c^{c'bdc}$ ) et correspond à la transvection  $t_{v_1+v_3+\omega v_6}$ .

b) Les sous-groupes  $R_a$ ,  $R_c$  et  $R_e$  définis à partir des graphes :



sont isomorphes au groupe orthogonal  $2.O_6^-(3) : 2$  (voir Annexe 2) ; leurs images dans  $U$  sont les représentants des trois classes de conjugaison de sous-groupes isomorphes à  $O_6^-(3) : 2$  . Leurs involutions centrales  $\mu_a, \mu_c, \mu_e$  appartiennent au multiplicateur de Schur de  $U$ , on a  $\mu_a\mu_c\mu_e = 1$ ,  $\mu_a = (aa'fbcd)^5$ ,  $\mu_c = (cc'dbaf)^5$  et  $\mu_e = (ee^odfab)^5$ .

c) Les sous-groupes  $W_a$ ,  $W_c$  et  $W_e$  définis à partir des graphes :



contiennent respectivement  $e^o, a'$  et  $c'$  ; ils sont isomorphes à  $W(E_7)$ , leurs involutions centrales  $z_a$ ,  $z_c$  et  $z_e$  sont dans  $Z(K)$ .

On a  $\mu_a z_a = \mu_c z_c = \mu_e z_e = q$  où  $q$  correspond au produit des cinq transvections d'un plan isotrope. On a  $Z(K) = \langle \mu_a, \mu_c \rangle \cdot \langle \mu_a z_a \rangle$ . ([2], [4], [13], [14], [15], [17], [20]).



## Références

- [1] Bourbaki N. *Groupes et algèbres de Lie*. Masson, 1981.
- [2] Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., and Wilson R.A. *Atlas of Finite Groups*. Clarendon Press, Oxford, 1985.
- [3] Conway J.H., Norton S.P., and Soicher L.H. The Bimonster, the group  $Y_{555}$  and the projective plane of order 3. In Tagora M., editor, *Computers in Algebra*. Marcel Dekker, 1988.
- [4] Cuypers H. and Hall J.I. 3-transposition groups of orthogonal type. *Journal of Algebra*, 152 :342–373, 1992.
- [5] Cuypers H. and Hall J.I. The 3-transposition groups with trivial center. *Journal of Algebra*, 178 :149–193, 1995.
- [6] Griess R.L., Meierfrankenfeld U., and Segev Y. A uniqueness proof for the Monster. *Annals of Math.*, 130 :567–602, 1989.
- [7] Hall J.I. Some 3-transposition groups with normal 2-subgroups. *Proc. London Math. Soc.*, 358 :112–136, 1989.
- [8] Hall J.I. 3-transposition groups with non-central normal 2-subgroups. *Journal of Algebra*, 146 :49–76, 1992.
- [9] Ivanov A.A. Presenting the Baby Monster. *Journal of Algebra*, 163 :88–108, 1994.
- [10] Jansen Ch., Lux K., Parker R.A., and Wilson R.A. *An Atlas of Brauer characters*, volume New Series II. London Math. Soc. Monographs (Oxford), 1995.
- [11] Soicher L.H. More on the group  $Y_{555}$  and the projective plane of order 3. *Journal of Algebra*, 136 :168–174, 1991.
- [12] Stroth G. Eine Kennzeichnung der Gruppe  ${}^2E_6(2)$ . *Journal of Algebra*, 35 :534–547, 1975.
- [13] Virotte-Ducharme M.M. *Couples fischeriens presque simples*. PhD thesis, Paris 7, 1985.
- [14] Virotte-Ducharme M.M. Présentation des groupes de Fischer 1. *Geom. Dedicata*, 41 :275–335, 1992.
- [15] Virotte-Ducharme M.M. Présentation de certains couples fischeriens de type classique. *Bull. Soc. Math. France*, 121 :227–270, 1993.
- [16] Virotte-Ducharme M.M. Some  $Y$ -groups. *Geom. Dedicata*, 65 :1–30, 1997.
- [17] Virotte-Ducharme M.M. Sur certaines extensions de  $SU(n, 4)$ . *Bull. Soc. Math. France*, 129 :1–31, 2001.
- [18] Zara F. *Classification des couples fischeriens*. PhD thesis, Université de Picardie Jules Verne Amiens, 1985.

- [19] Zara F. Actions of reflection groups on nilpotents groups. *Europ. J. of Combinatorics*, 18 :231–242, 1997.
- [20] Zara F. Présentations des groupes de Fischer  $D_4(2) : S_3$  et  $D_4(3) : S_3$ . *Journal of Algebra*, 170 :705–734, 1994.